厦门大学信息学院本科选修课
2021-2022第二学期

模式识别
PatternRecognition

主讲：王程

第三章 线性判别函数

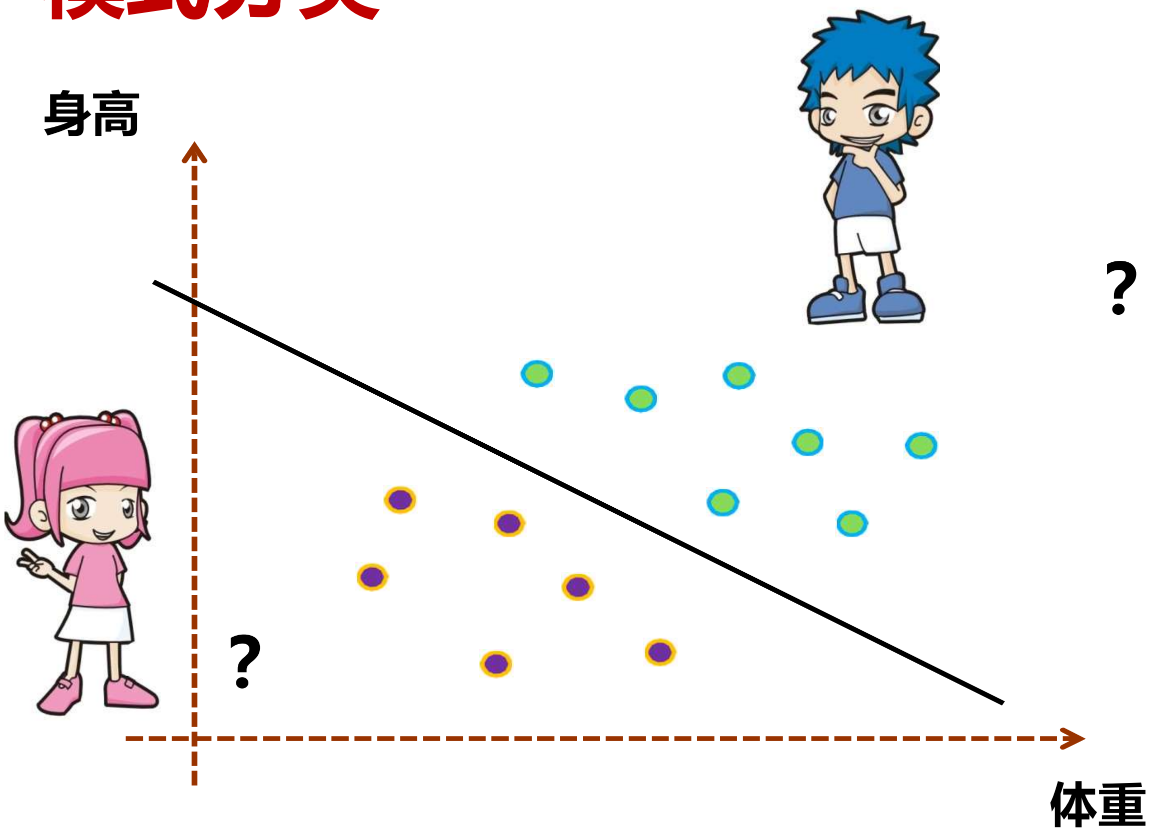
3.1 线性判别函数

3.2 模式空间和权空间

3.3 超平面的几何性质

3.1线性判别函数

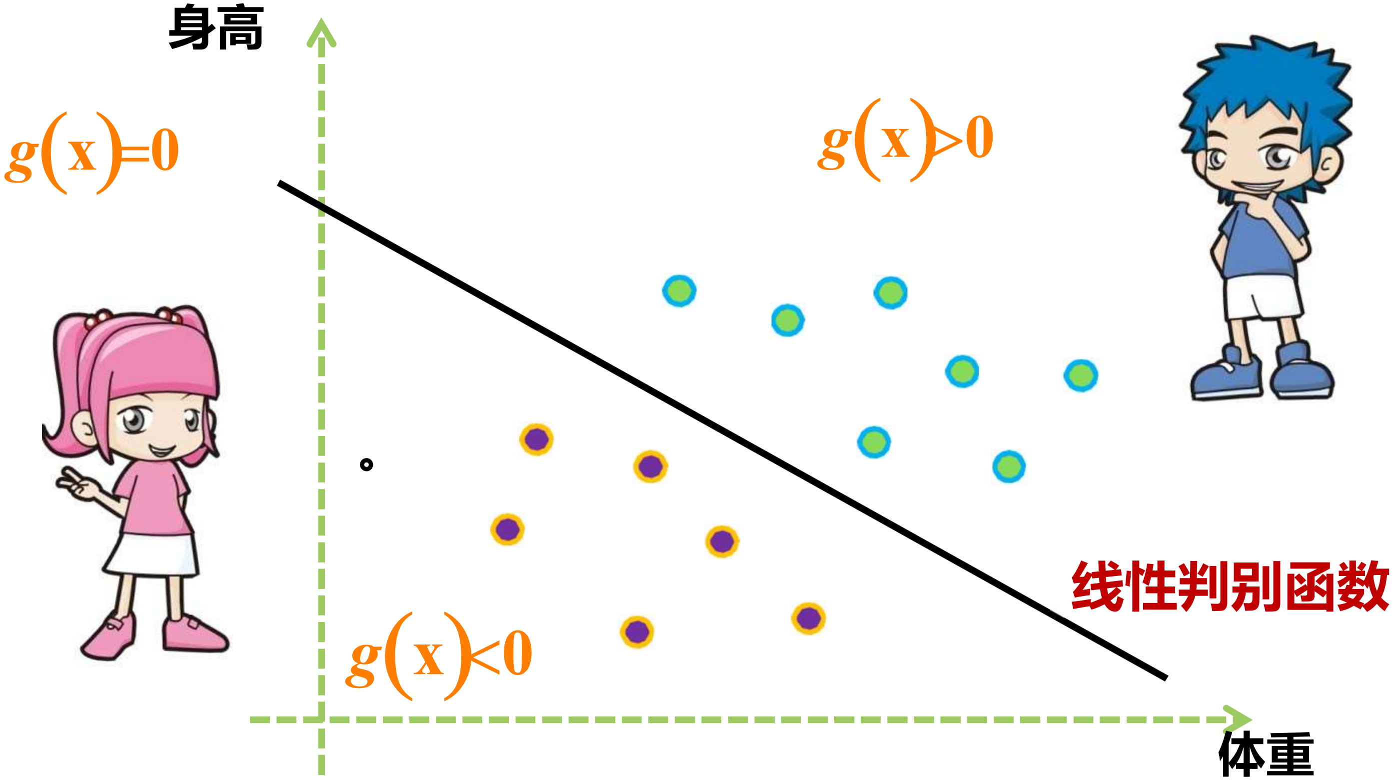
模式分类



特征={身高、体重}

我们需要根据个人的身高和体重，判断某人是男生还是女生，该问题即是一个模式分类问题。

3.1线性判别函数



$g(x)=w^T x+w_0$

模式识别系统的主要作用是判别各个模式的所属类别，例如一个两类分类问题，就是将输入模式 x 划分为 $\omega 1$和 $\omega 2$ 两类

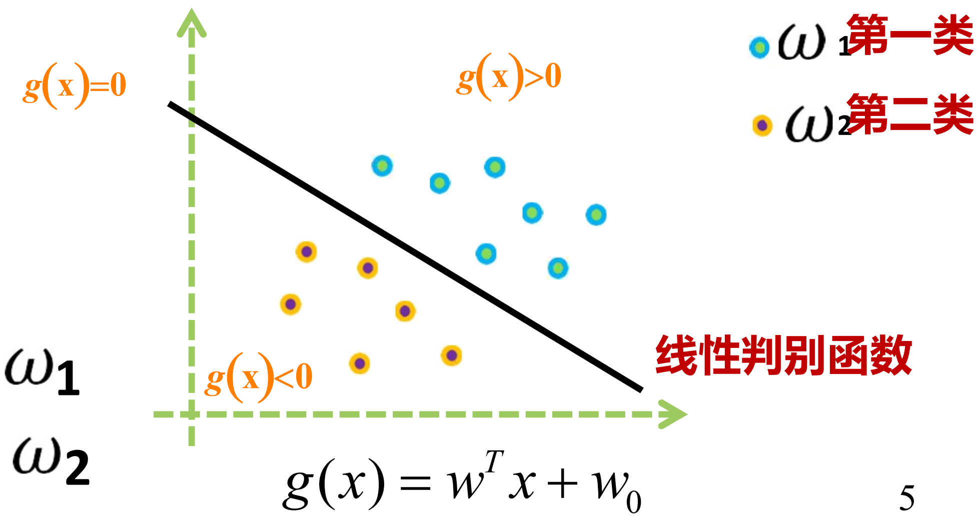
3.1线性判别函数

两类判别问题：判别函数 $g(x)$ **为** $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} + w_0$

在D维空间中，判别函数 $g(\boldsymbol{x}) = 0$ **对应一个D−1维的超平面。其中：w为权向量，是超平面的法向量，** w_0 **为偏差,x为输入特征。**

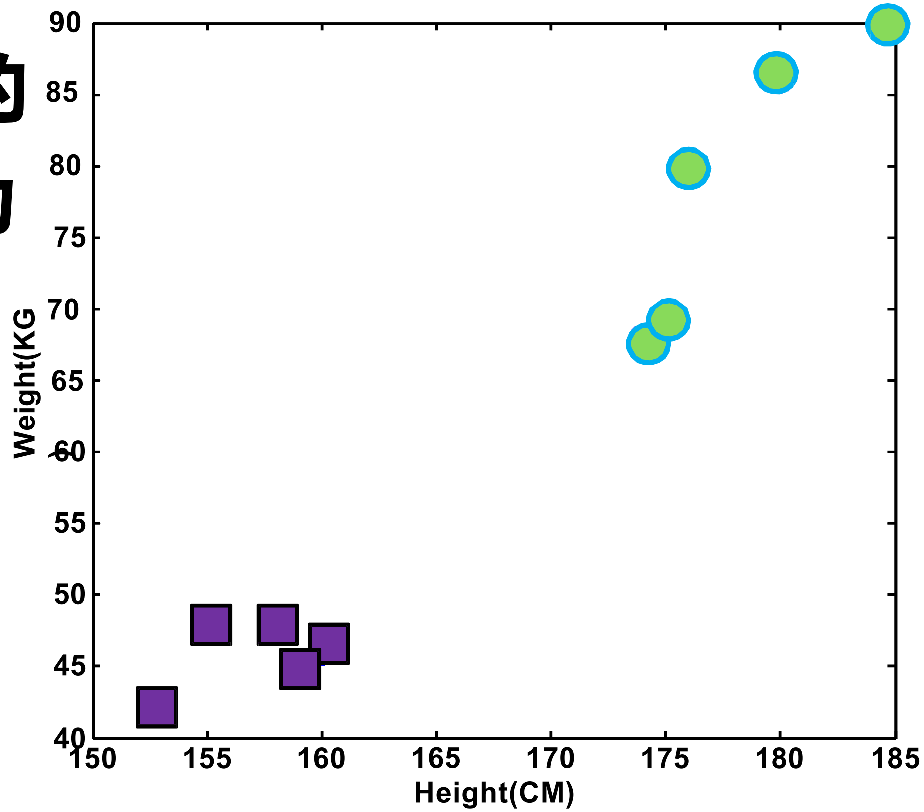
判别准则：

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} > 0 & \boldsymbol{x} \in \omega_1 \\ < 0 & \boldsymbol{x} \notin \omega_2 \end{cases}$$



3.1线性判别函数

已知一个班级所有同学的身高和体重数据，学号为{0,2,3,4,7}的同学为男生，学号为{1,5,6,8,9}的同学为女生，如何分开两类数据。



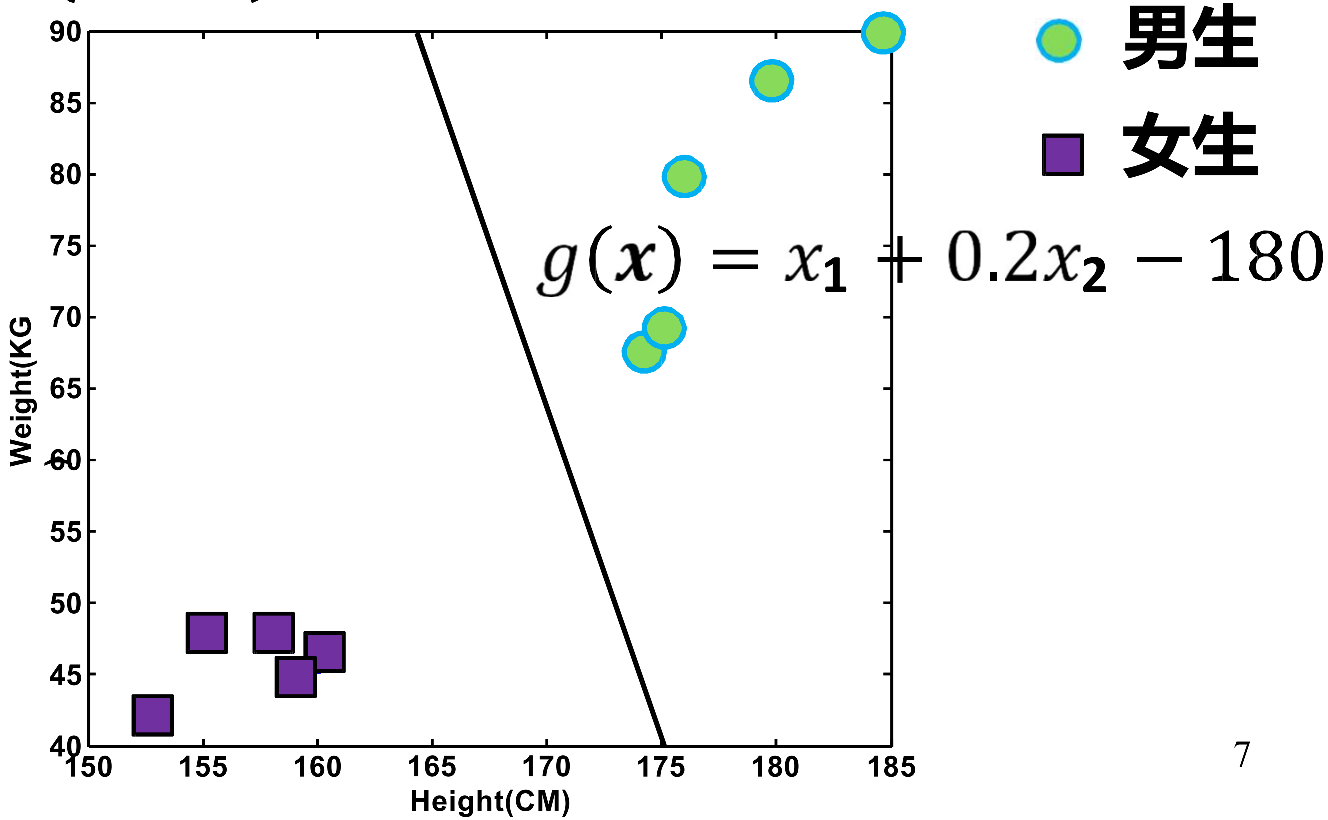
学号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
身高（cm）	174	155	175	180	185	153	158	176	160	159
体重（kg）	68	48	69	86	90	42	48	80	46	45

3.1线性判别函数

权向量$\boldsymbol{w} = (1,0.2)^{\mathrm{T}}$,

偏差$w_0 = -180$,

输入特征$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$

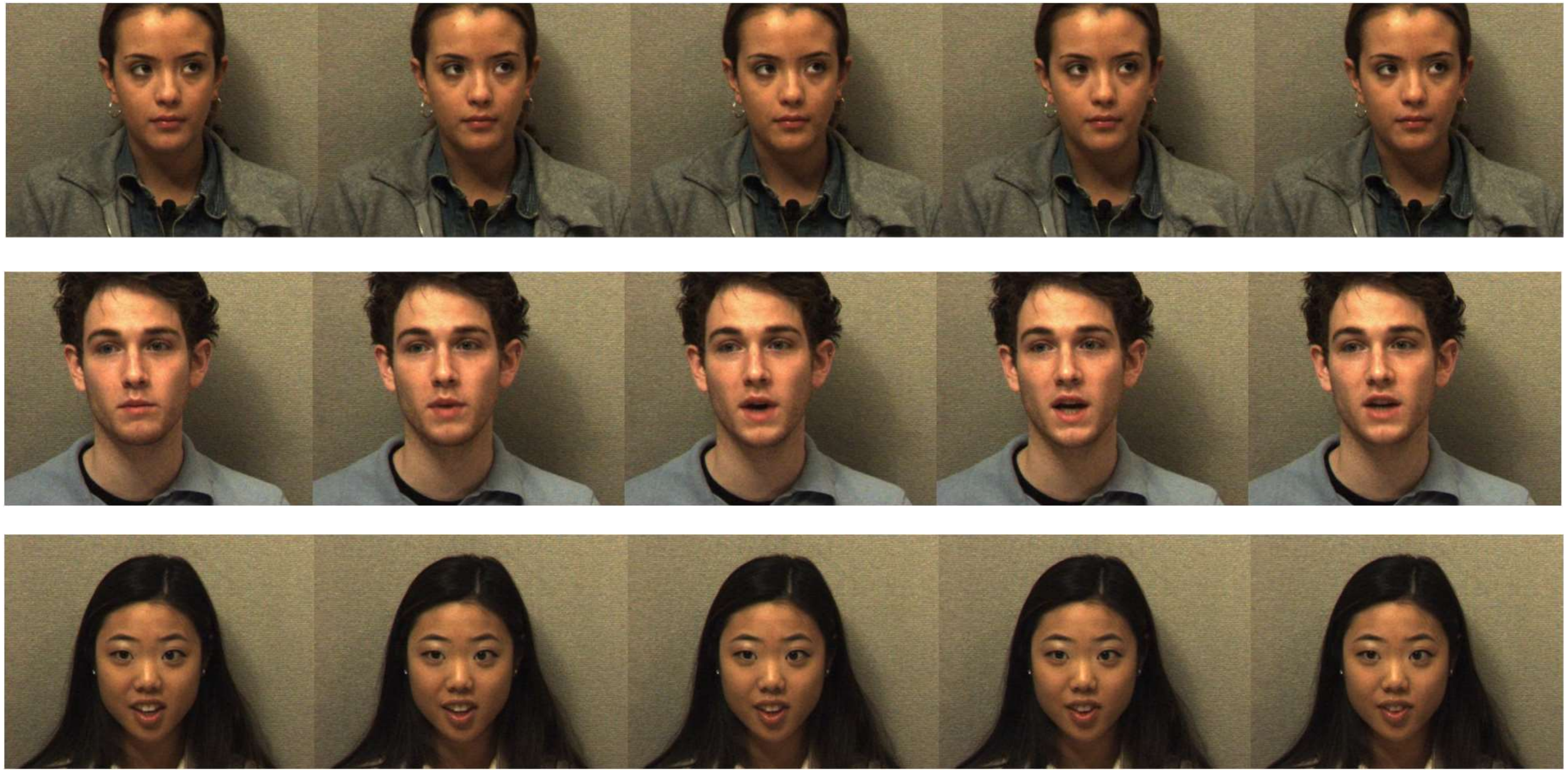


3.1线性判别函数

线性判别函数是有监督模式识别的主要方法之一，用来判断模式的所属类别，一般包括：

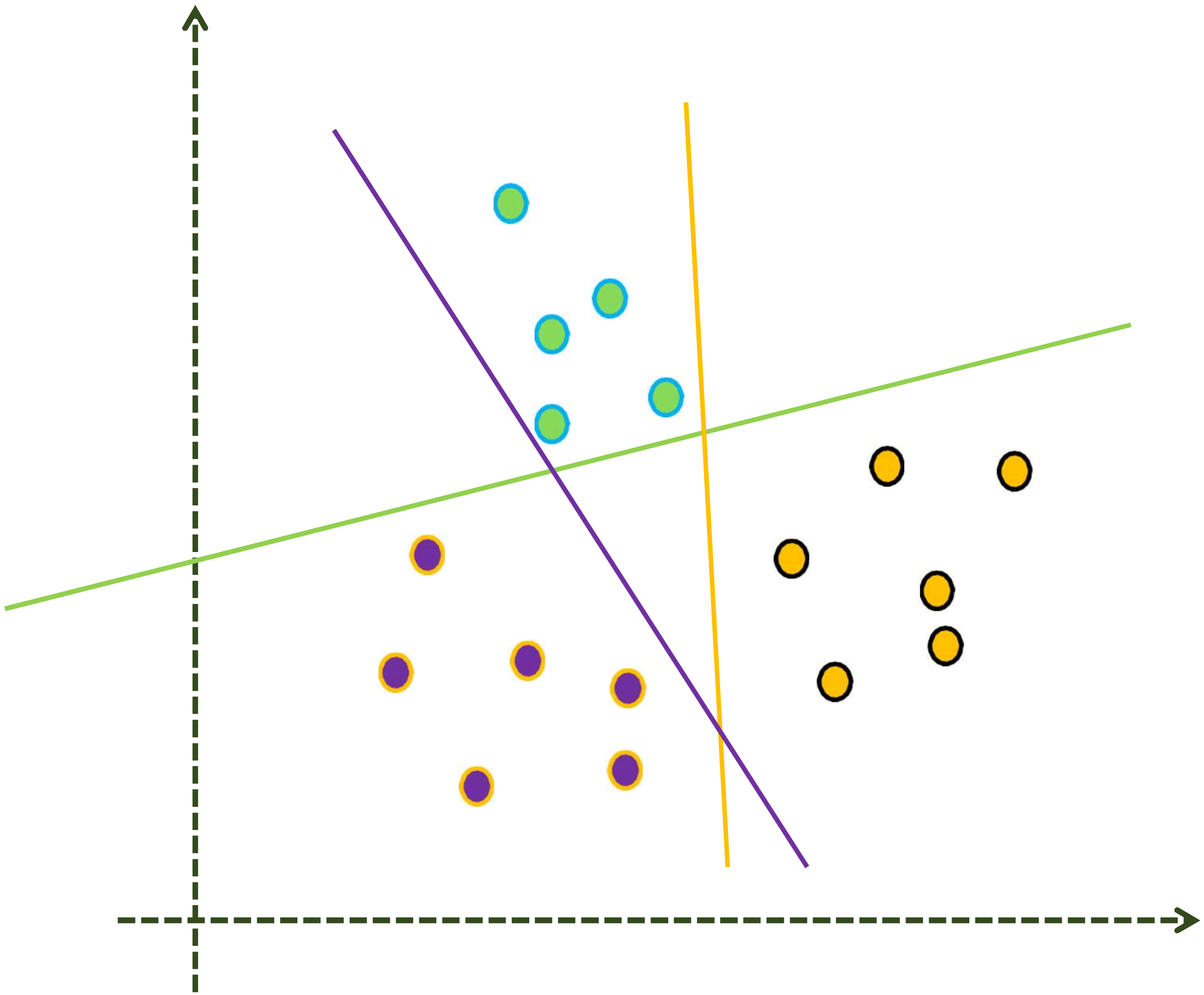
1. **人工神经网络（ArtificialNeuralNetworks）**
2. **Fisher判别(FisherDiscriminant)**
3. **支持向量机(SupportVectorMachine)**
4. **级联分类器(BoostingScheme)**

3.1线性判别函数



三类(人脸识别)

3.1线性判别函数



3.1线性判别函数

多类问题：

模式可以划分为划 $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_K$类，线性判别函数的分共有3种：

1. **每一类有一个简单的判别函数**
2. **每两类有一个判别函数（有不确定区域）**
3. **每两类有一个判别函数（没有不确定区域）**

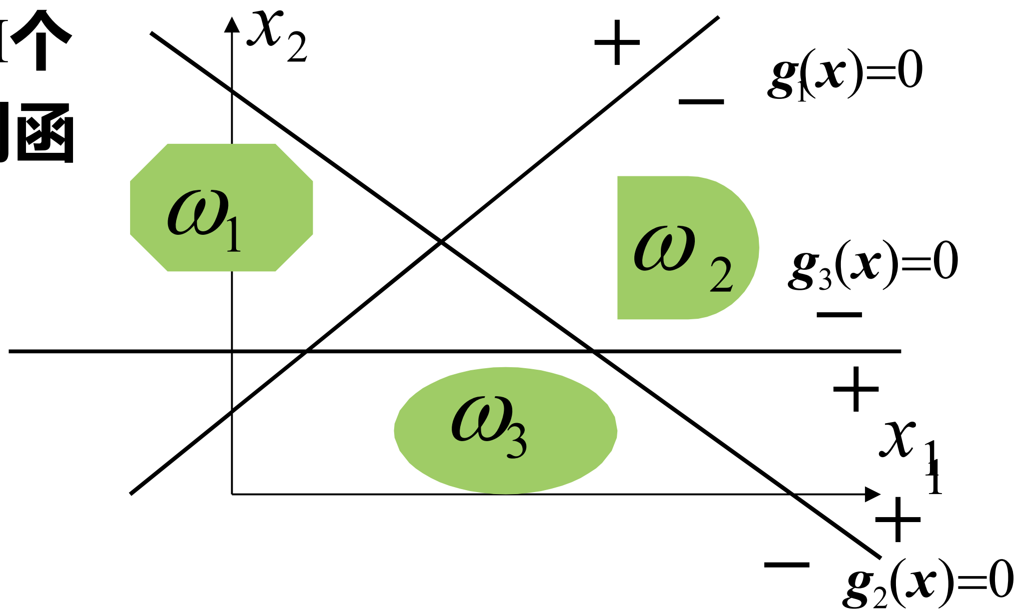
3.1线性判别函数

情况1：

每一种情况都采用两类判别：

$$g_i(x) = w_i^T x + w_0 = \begin{cases} > 0 & x\text{属于}\omega_i \\ < 0 & x\text{不属于}\omega \end{cases}$$

这样M个分类问题分解成M个两类问题，所以有M个判别函数，对应有M个
权向量和偏差。



3.1线性判别函数

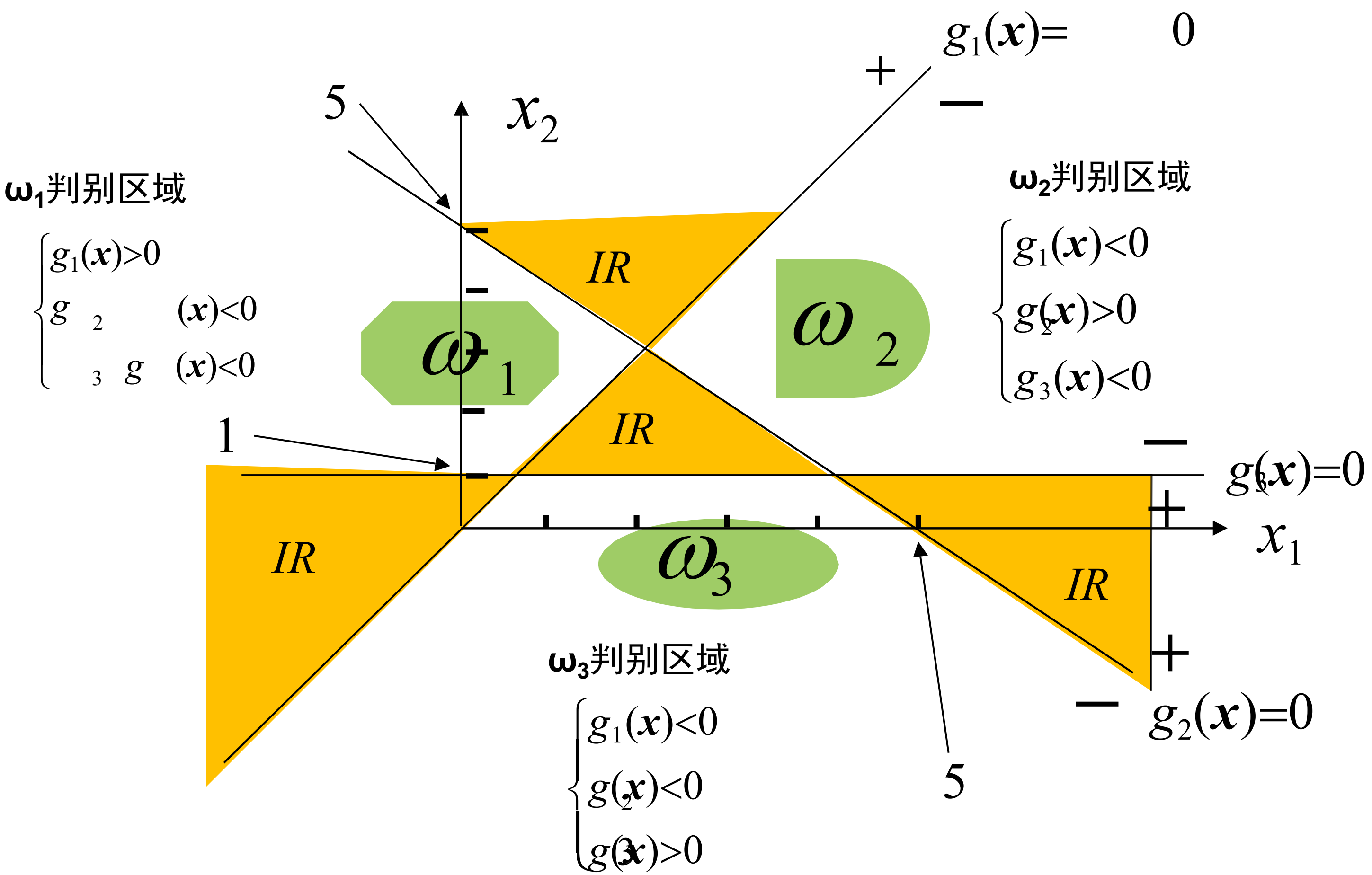
例：已知三类$\omega_1,\omega_2,\omega_3$的判别函数分别为：

$$\begin{cases} g_1(x) = -x_1 + x_2 \\ g_2(x) = x_1 + x_2 - 5 \\ g_3(x) = -x_2 + 1 \end{cases}$$

对应的三个判别界面为：

$$\begin{cases} g_1(x) = -x_1 + x_2 = 0 \\ g_2(x) = x_1 + x_2 - 5 = 0 \\ g_3(x) = -x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

3.1线性判别函数



图中的黄色区域为不确定区域（IR），这样的区域存在两个或两个以上的判别函数大于零，或不存在判别函数大于零。

3.1线性判别函数

情况2：

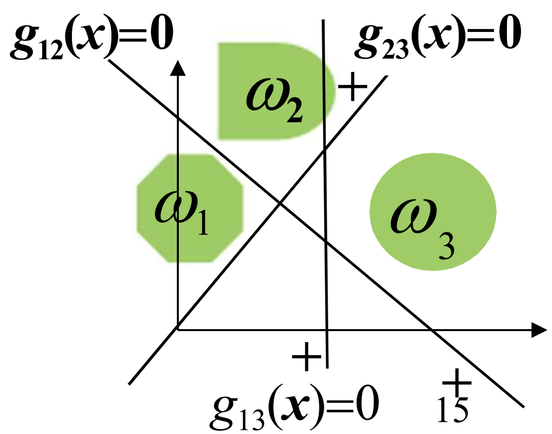
采用分对划分，即m_i/m_j二分法。一个判别界面只能分开两个类别，但不能不用它把其余所有的类别分开。它的判别函数形式为：

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}_{ij}{}^T \boldsymbol{x} + w_{ij0} = \begin{cases} > 0 & \boldsymbol{x} \in \omega_i \\ < 0 & \boldsymbol{x} \notin \omega_j \end{cases}$$

对于M类分类问题，需要有M(M-1)/2个判别函数

注意：

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) = -g_{ji}(\boldsymbol{x})$$



3.1线性判别函数

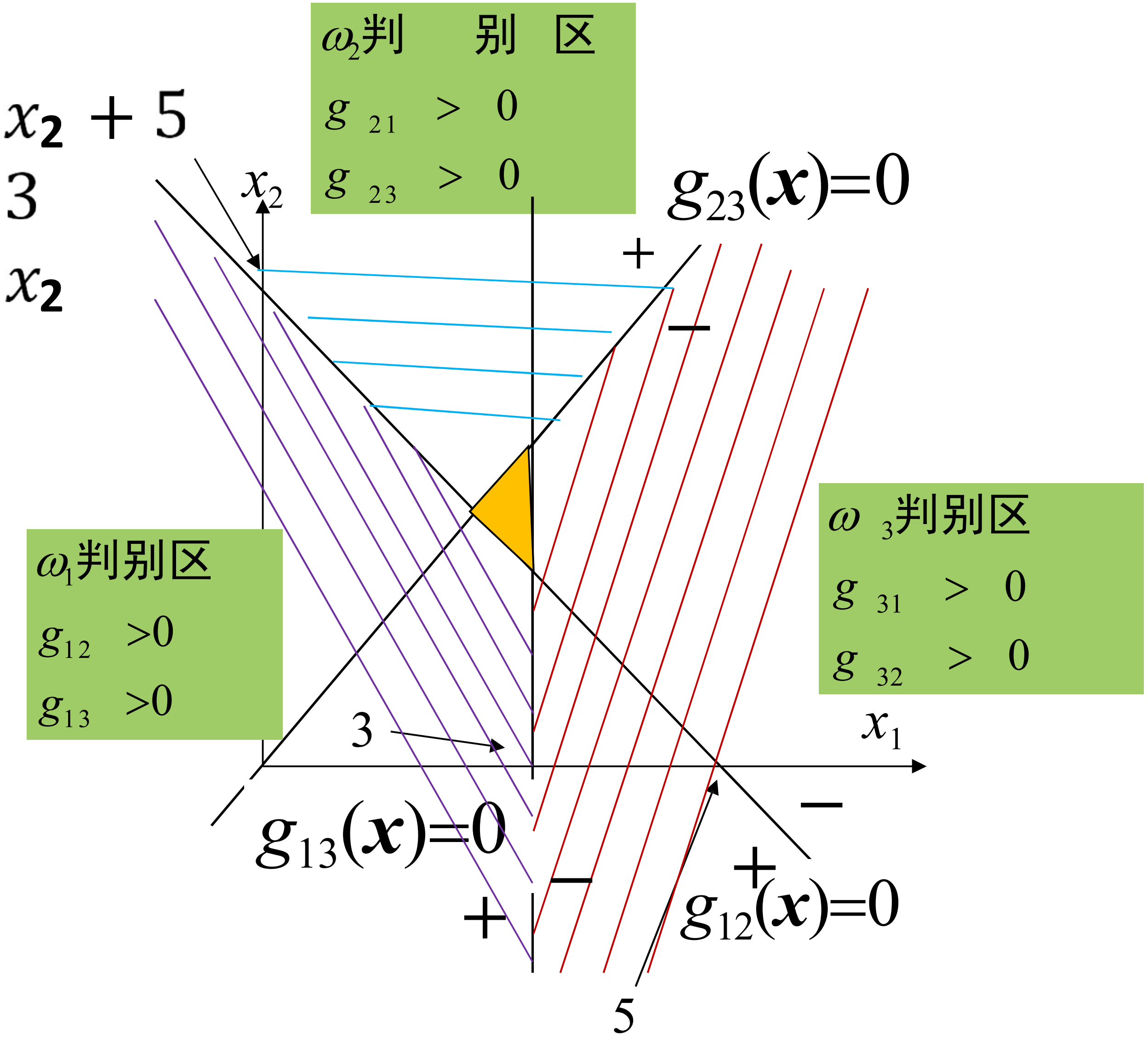
例：一个三类问题，三个判别函数为

$$g_{12}(x) = -x_1 - x_2 + 5$$
$$g_{13}(x) = -x_1 + 3$$
$$g_{23}(x) = -x_1 + x_2$$

对给定的模式 x**，如** $g_{12}(x) > 0$**和** $g_{13}(x) > 0$**，则** $x \in \omega_1$**，而** $g_{23}(x)$**在判别类模式时无关。**

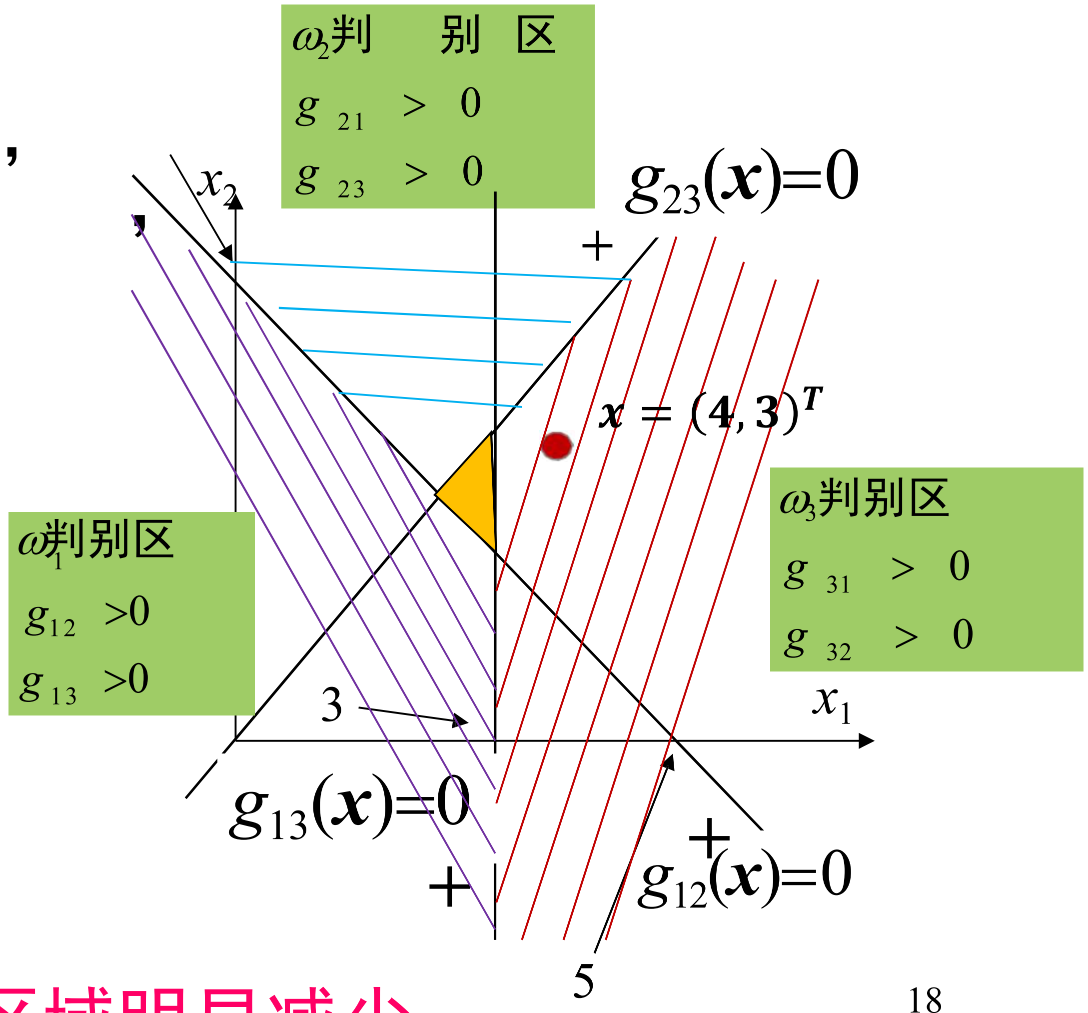
3.1线性判别函数

$$g_{12}(\boldsymbol{x}) = -x_1 - x_2 + 5$$
$$g_{13}(\boldsymbol{x}) = -x_1 + 3$$
$$g_{23}(\boldsymbol{x}) = -x_1 + x_2$$



3.1线性判别函数

如$\boldsymbol{x}=(4,3)^T$,则$g_{12}=-2$,
g_{13}=-1,g_{23}=-1。
也可写成$g_{21}=2$，$g_{31}=1$，
g_{32}=1。因$g_{3j}>0$,
$j\ \ =1,2$,
故$\boldsymbol{x}=(4,3)^T\in\omega_3$,
与g_{12}值无关



相对于情况 1 ，不确定区域明显减少。

3.1线性判别函数

情况3：

对于M类情况，有M个判别函数，即：

$$g_i(x) = w_i^T x + w_{i0}$$

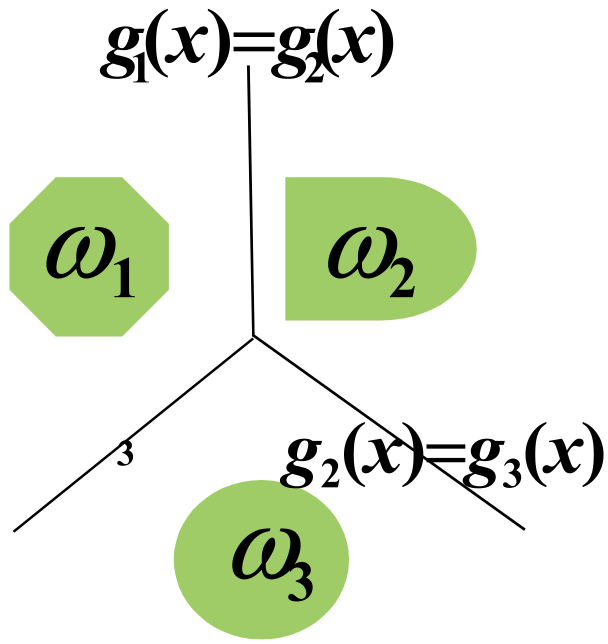
如果

$$g_k(x) = max\{g_i(x), i = 1,2, \ldots, M\},$$

则 x 属于第k类。

这类分类特点是把M类情况分为 $g(x)=g(x)$ M－1个两类问题，这类方法的特点是不存在不确定区域。

1 3



3.1线性判别函数

例：一个三类（M=3）模式分类器，其判别函数为

$g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1 + x_2$

$g_2(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - 1$

$g_3(\boldsymbol{x}) = -x_2$

属于ω_1类的区域应满足$g_1(\boldsymbol{x}) > g_2(\boldsymbol{x})$和$g_1(\boldsymbol{x}) > g_3(\boldsymbol{x})$，故$\omega_1$的判别界面为

$$\boldsymbol{g}_{12}(\boldsymbol{x}) = g_1(\boldsymbol{x}) - g_2(\boldsymbol{x}) = -2x_1 + 1 = 0$$

$$\boldsymbol{g}_{13}(\boldsymbol{x}) = g_1(\boldsymbol{x}) - g_3(\boldsymbol{x}) = -x_1 + 2x_2 = 0$$

3.1线性判别函数

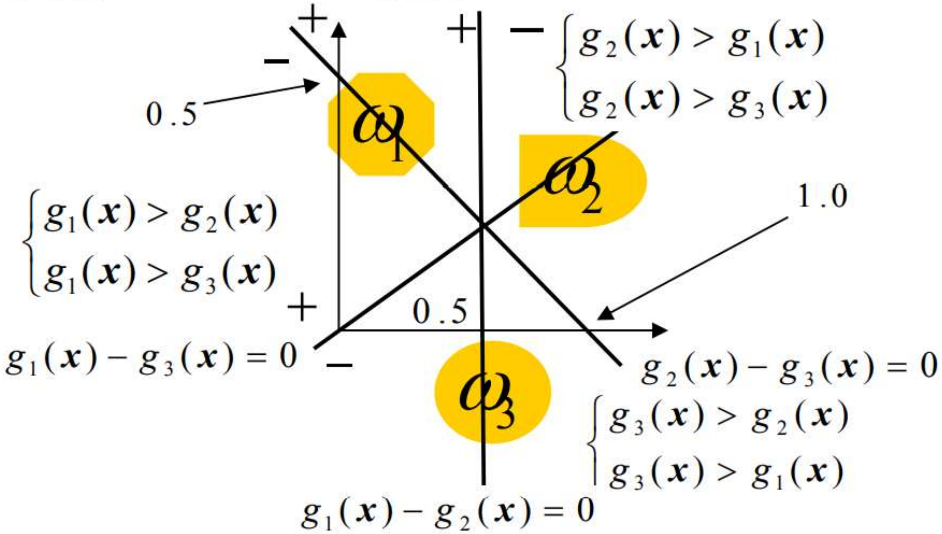
同样，属于ω_2的区域应满足$g_2(\boldsymbol{x}) > g_1(\boldsymbol{x})$和$g_2(\boldsymbol{x}) > g_3(\boldsymbol{x})$，故$\omega_2$的判别界面为：

$$g_{21}(\boldsymbol{x}) = g_2(\boldsymbol{x}) - g_1(\boldsymbol{x}) = 2x_1 - 1 = 0$$

$$g_{23}(\boldsymbol{x}) = g_2(\boldsymbol{x}) - g_3(\boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2 - 1 = 0$$

同样可以得到ω_3的判别界面为：

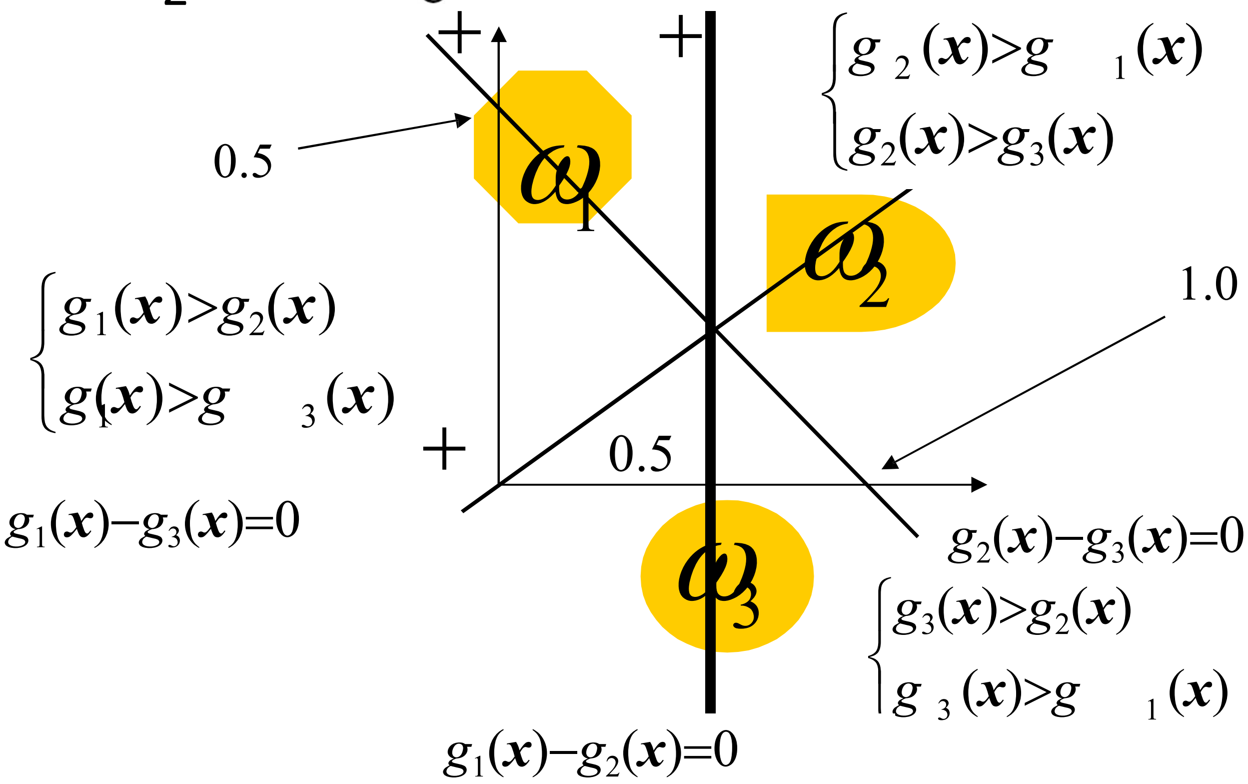
$$g_{31}(\boldsymbol{x}) = -g_{13}(\boldsymbol{x}), g_{32}(\boldsymbol{x}) = -g_{23}(\boldsymbol{x})$$



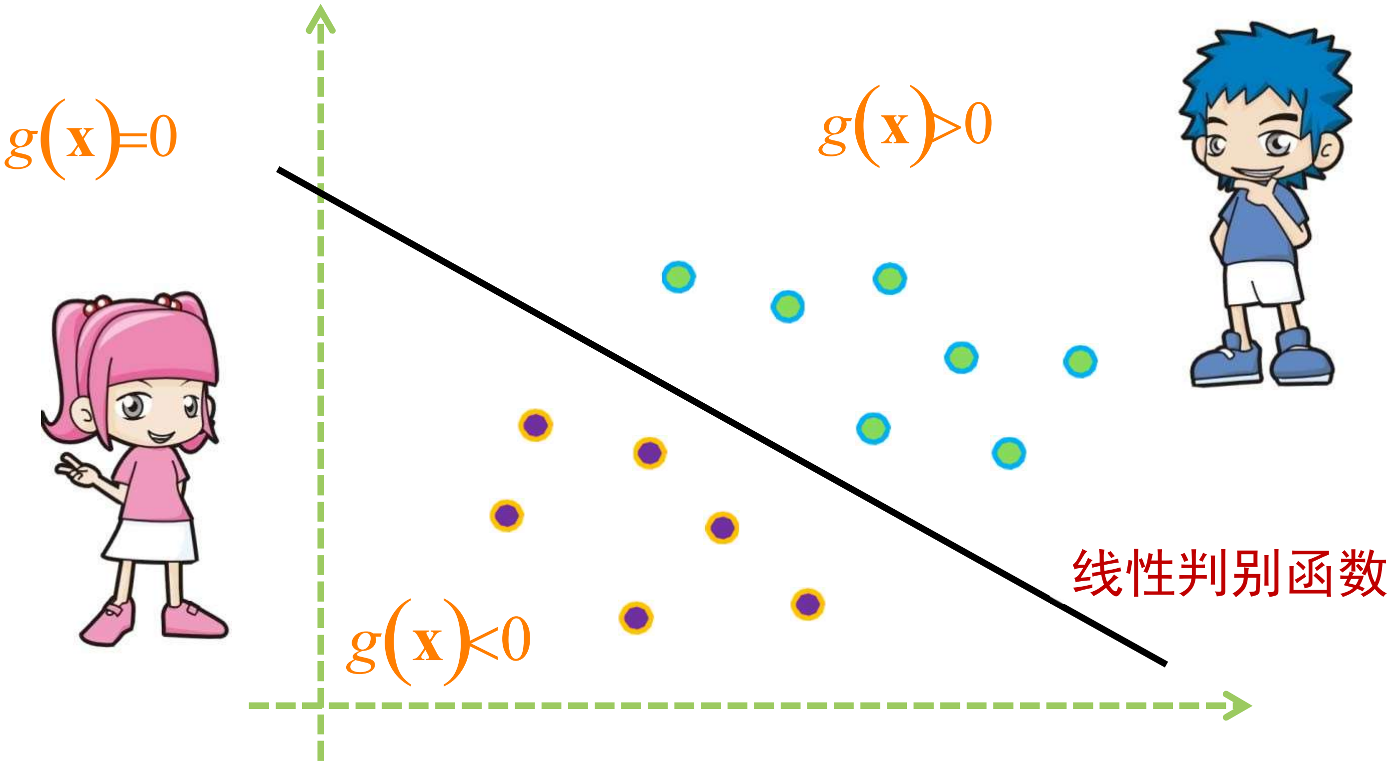
3.1线性判别函数

从图中可以看出，情况３不存在不确定区域。

$$g_{12}(\boldsymbol{x}) = -2x_1 + 1 = 0$$
$$g_{13}(\boldsymbol{x}) = -x_1 + 2x_2 = 0$$
$$g_{23}(\boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2 - 1 = 0$$



3.1线性判别函数



$g(\mathbf{x})=\mathbf{w}^T\mathbf{x}+w_0$

模式识别系统的主要作用是判别各个模式的所属类别，例如一个两类分类问题，就是将输入模式x 划分为 ω_1 和ω_2两类。

3.1线性判别函数

线性判别函数：

$$g(\boldsymbol{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_0$$
$$= \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} + w_0$$

其中： $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_D)^T$称为**权向量(weight vector)**，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_D)^T$称为**特征向量**或者**模式向量**。

模式向量可以指：一幅图像所有像素点的灰度值、一个人的身高和体重、一天中天气的各项指数。

3.1线性判别函数

线性判别函数（增广形式）：

$$g(\boldsymbol{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_0$$
$$= \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

其中:$\boldsymbol{w}=(w_1,w_1,\ldots,w_D,w_0)^T$称为**增广权向量**，

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_D,1)^T$，称为**增广特征向量**或者**增广模式向量**。

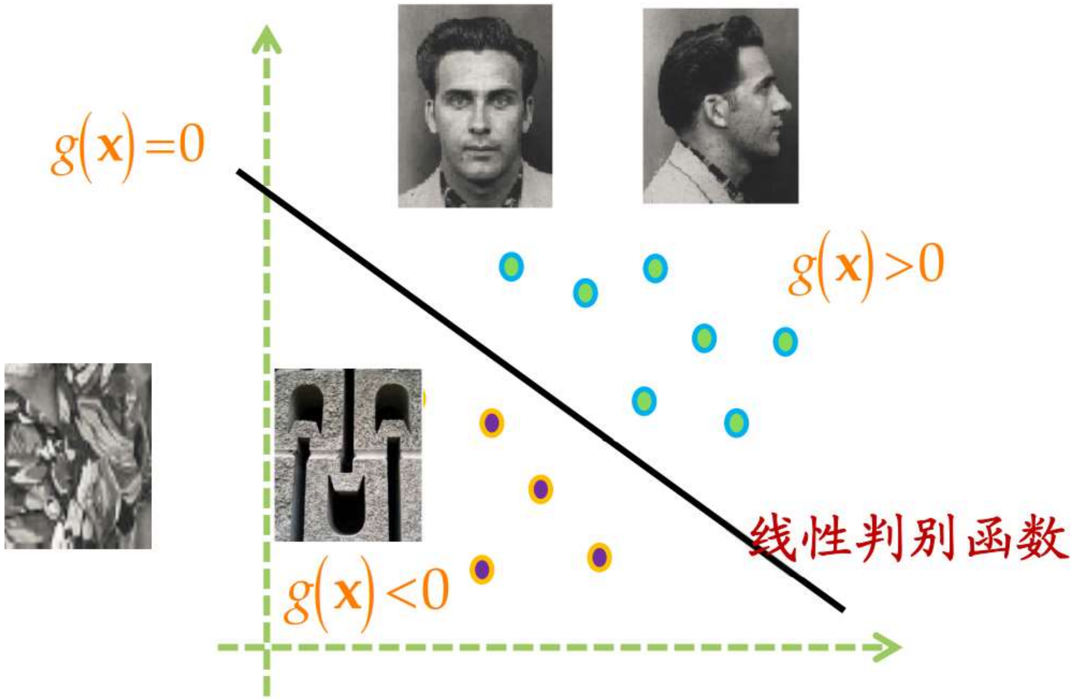
第三章 线性判别函数

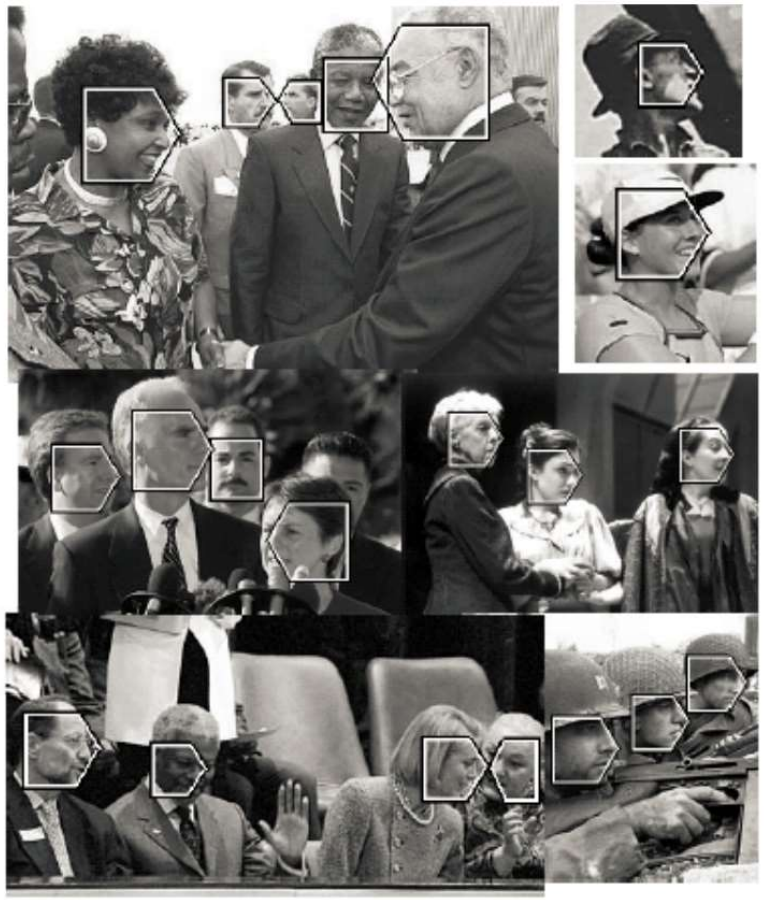
3.1 线性判别函数

3.2 模式空间和权空间

3.3 超平面的几何性质

3.2模式空间和权空间





$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x} + w_0$$

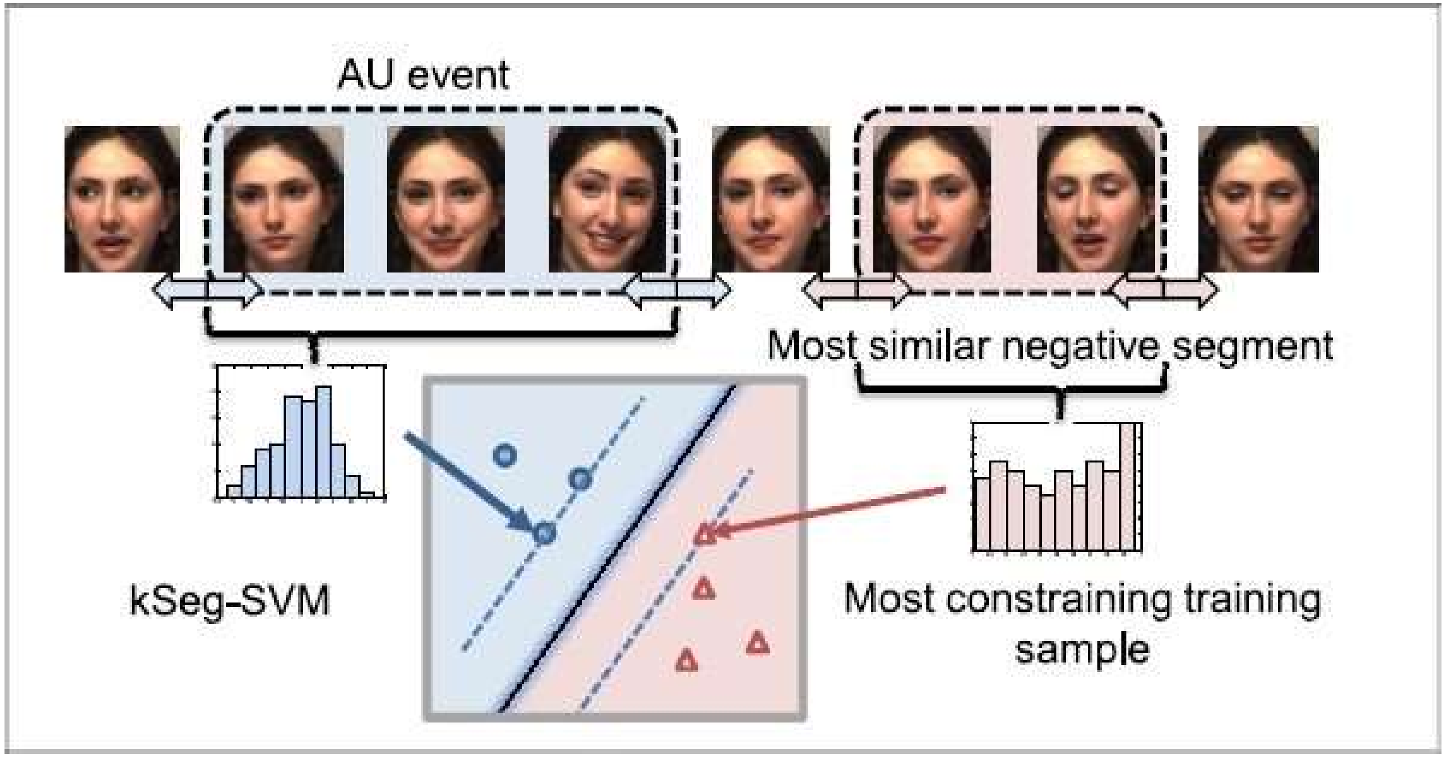
参数学习阶段（训练）：

$$g(\boldsymbol{x}) = w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_0$$

判别检测阶段（测试）：

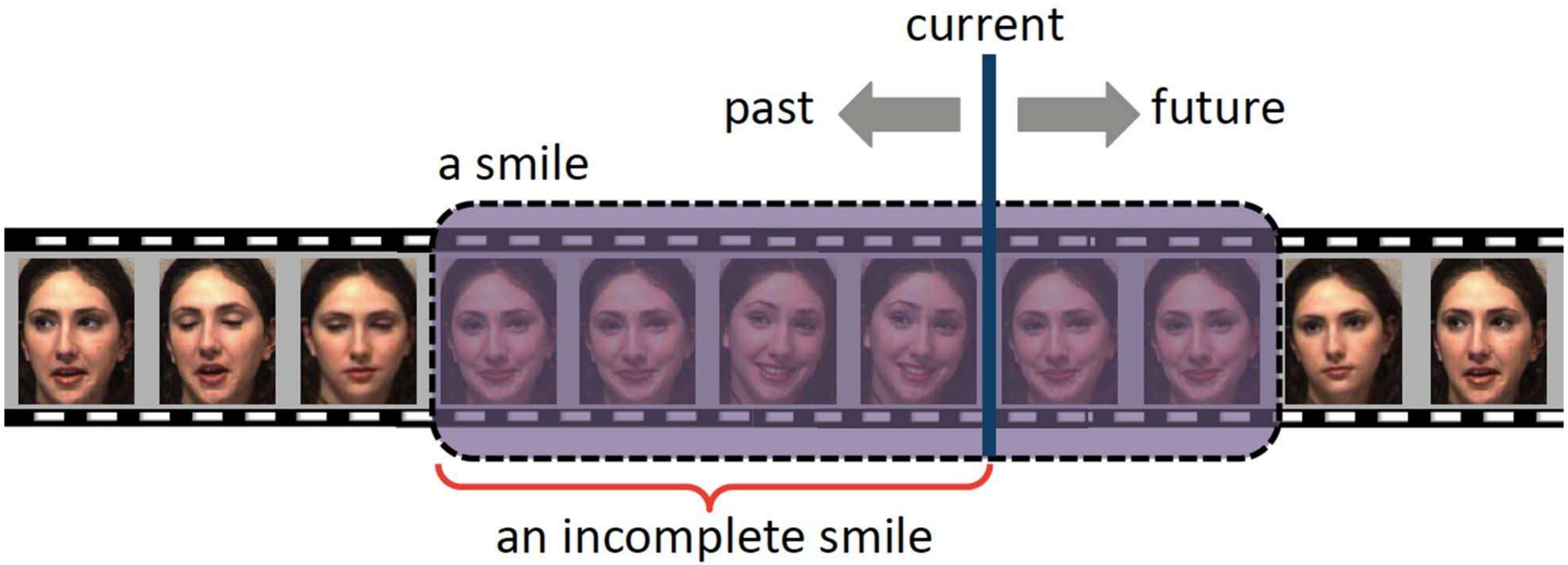
$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} + w_0 \begin{cases} > 0 & \boldsymbol{x} \in \omega_1 \\ < 0 & \boldsymbol{x} \notin \omega_2 \end{cases}$$

3.2模式空间和权空间



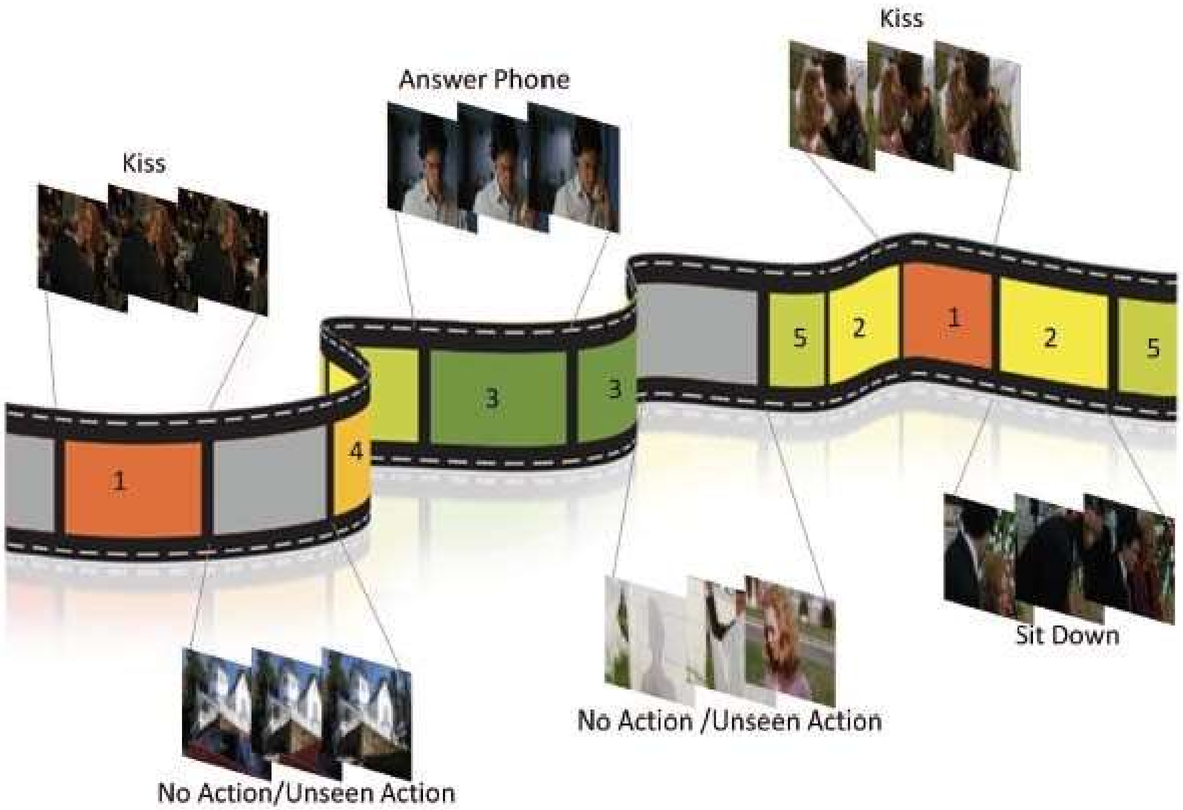
表情单元识别

3.2模式空间和权空间



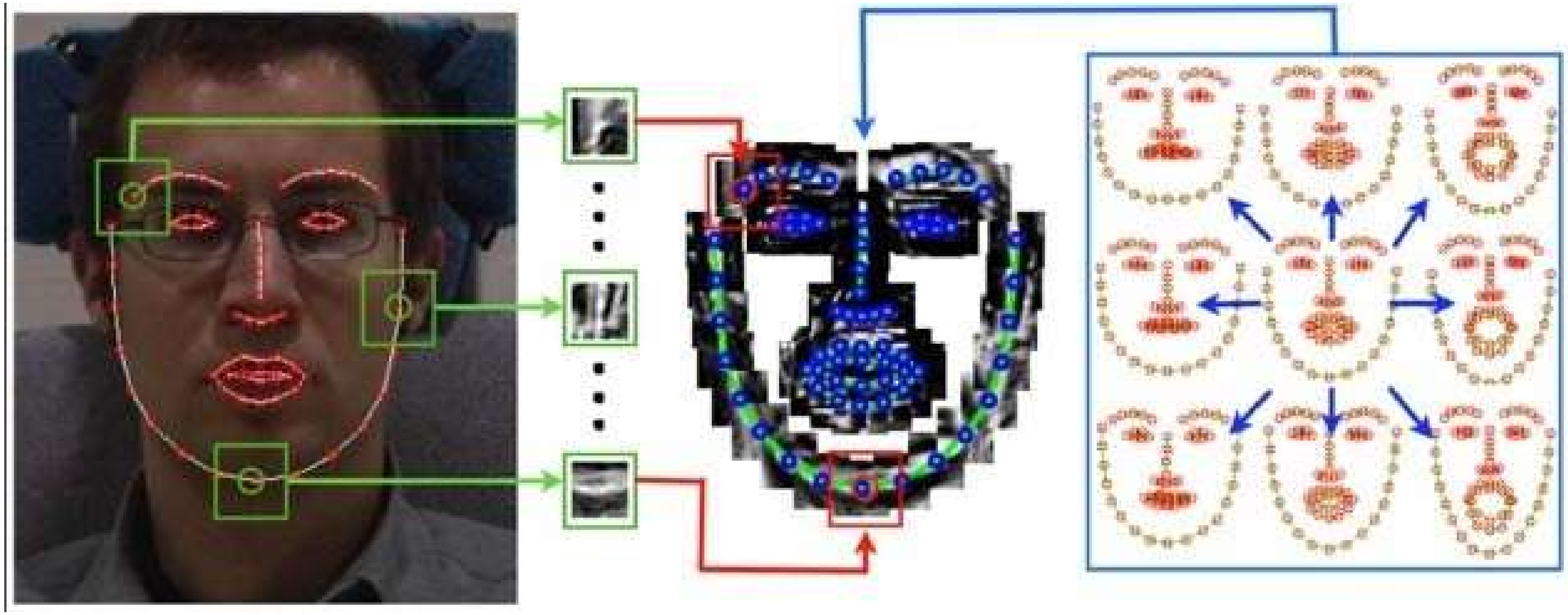
早期行为与表型识别

3.2模式空间和权空间



视频中的行为检测与识别

3.2模式空间和权空间



人脸跟踪

3.2模式空间和权空间

（1）模式空间

如线性判别方程为：

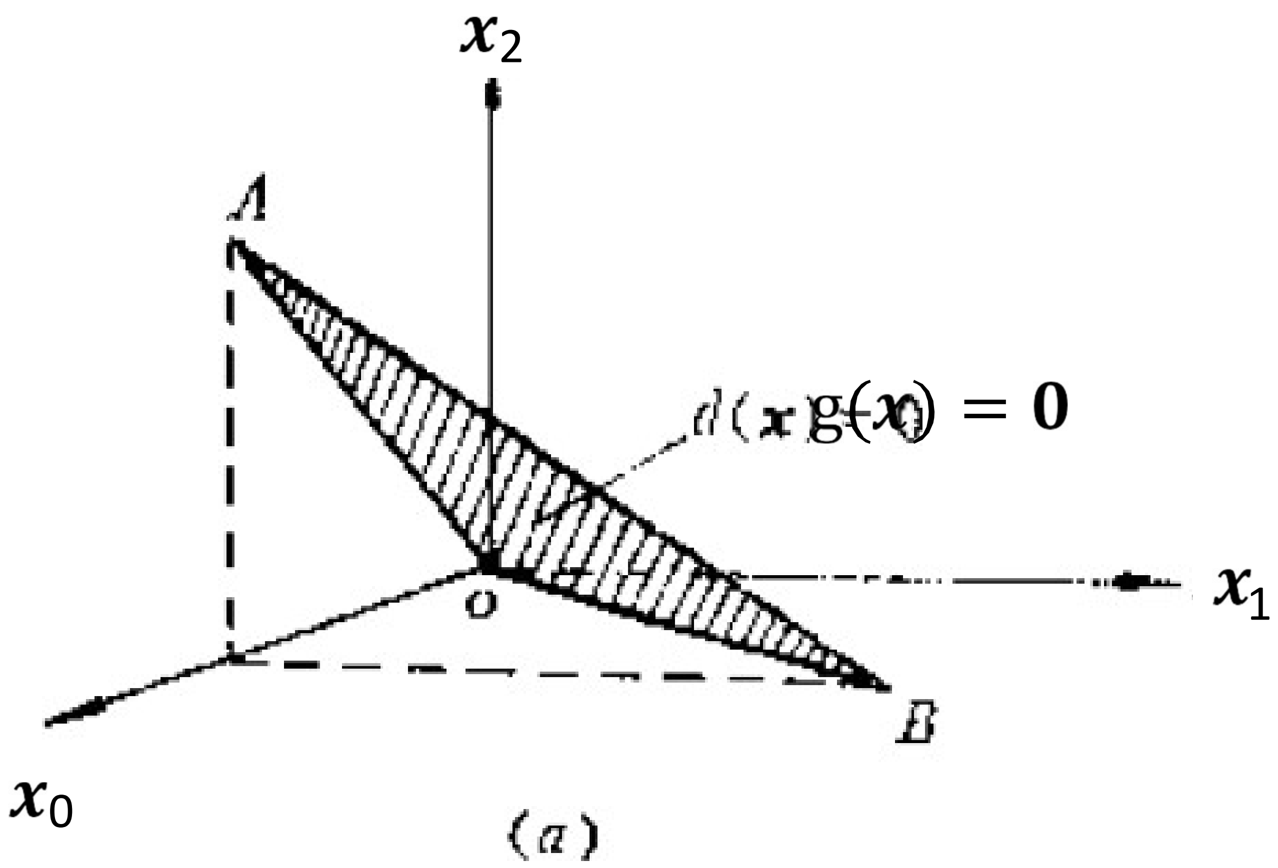
$$w_0 x_0 - w_1 x_1 - w_2 x_2 = 0$$

它在三维空间$x_0 - x_1 - x_2$中**是一平面方程式，**

$w = (w_0, w_1, w_2)$**是方程的系数。把** w**向量作为该平面的法线向量，则该线性方程决定的平面通过原点且与**w**垂直，如图中绘有阴影线的平面。**

3.2模式空间和权空间

$$g(\boldsymbol{x}) = w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0$$

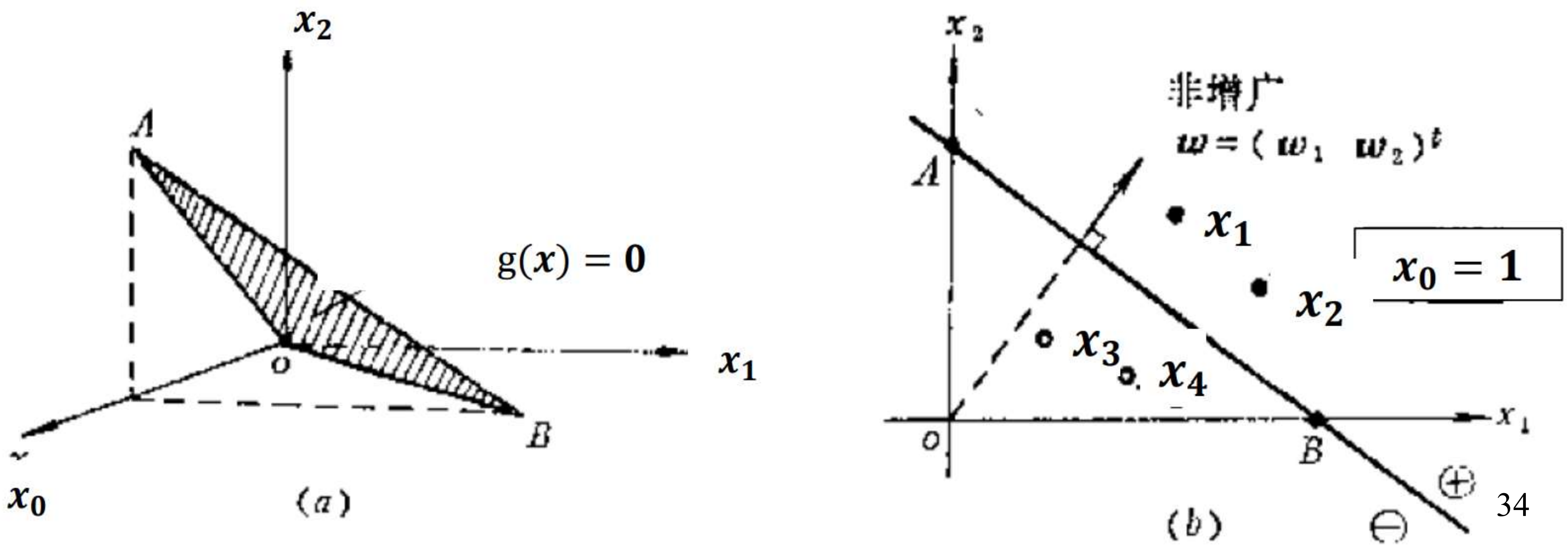


3.2模式空间和权空间

因为$x=(x_0,x_1,x_2)^T$**是二维模式**$(x_1,x_2)^T$**的增广向量，故**$x_0=1$**。如绘在非增广的模式空间中，就是**x_1-x_2**二维空间，判别函数就是下面联立方程**

$$\begin{cases} w_0x_0+w_1x_1+w_2x_2=0 \\ x_0=1 \end{cases}$$

的解。



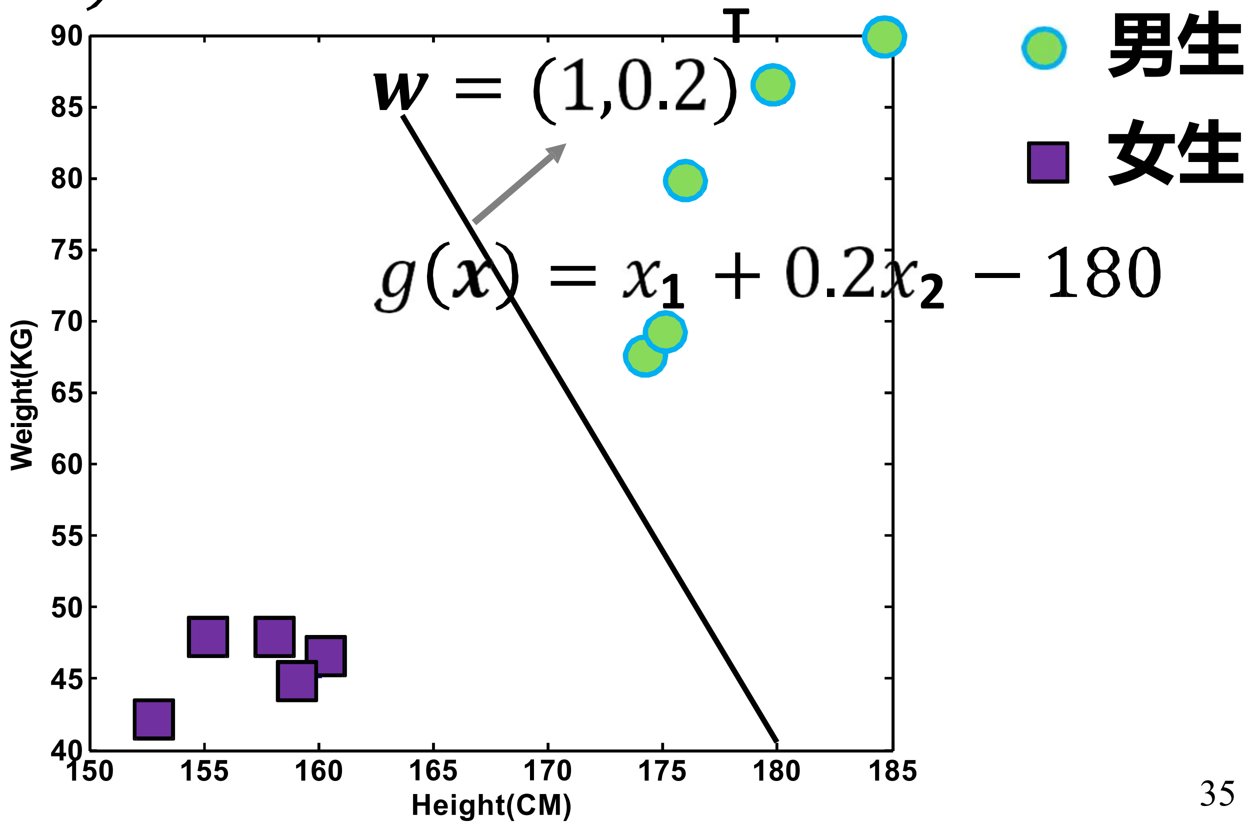
3.2模式空间和权空间

权向量$\boldsymbol{w} = (1,0.2)^T$,

偏差$w_0 = -180$,

模式$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$

非增广模式空间



3.2模式空间和权空间

（2）权空间

将判别函数绘在权向量空间中，如将直线方程

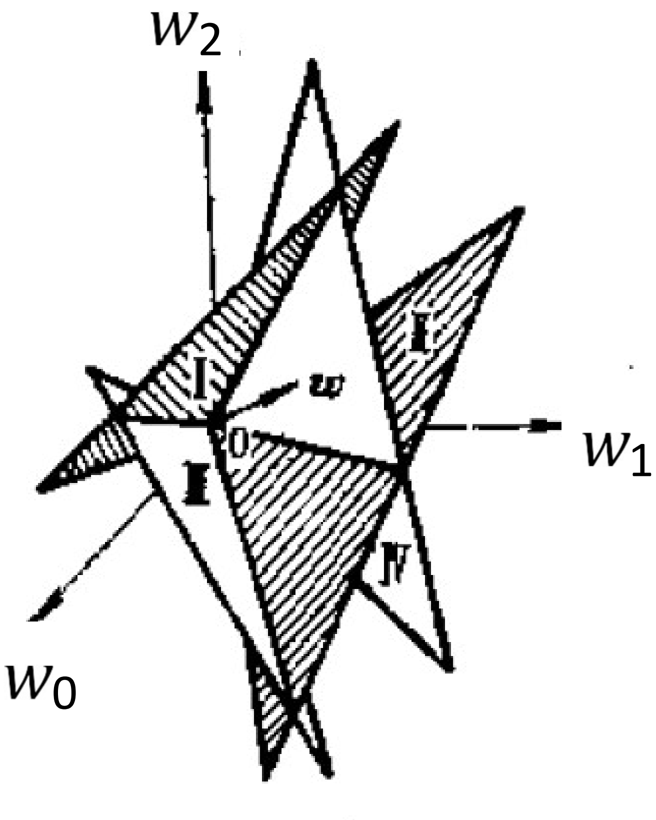
$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_0 = 0$$

绘在权向量$\boldsymbol{w} = (w_0, w_1, w_2)^T$**的三维空间中，**

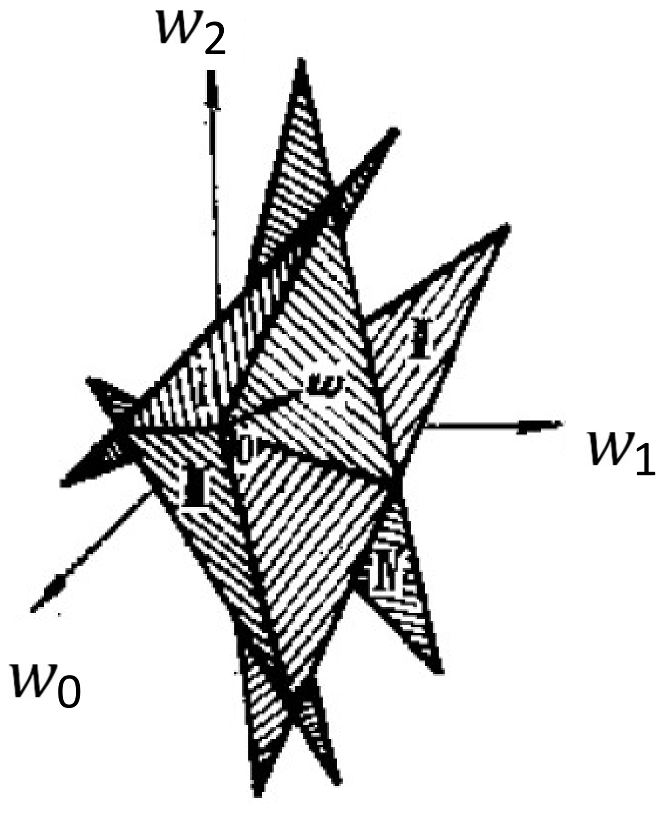
$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, 1)^T$**是方程的系数。如以向量作为法线向量，则该线性方程所决定的平面为通过原点且与法线向量垂直的平面。**

3.2模式空间和权空间

权空间



(a)

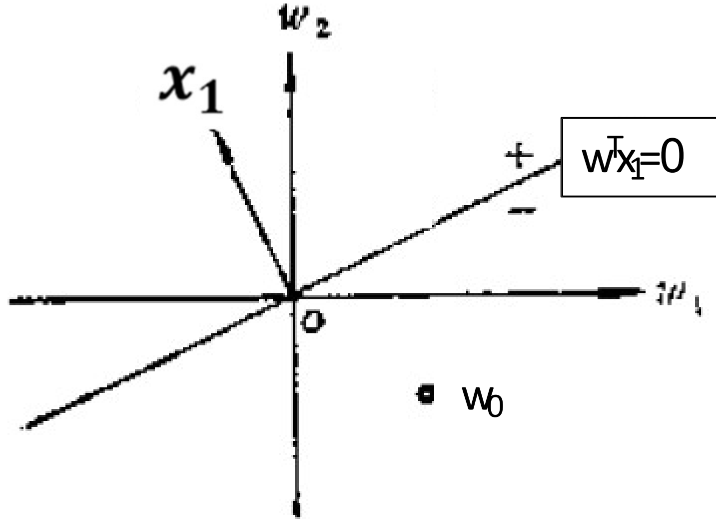


(b)

3.2模式空间和权空间

判别方程同样将权空间划分为正、负两边。在系数x不变的条件下：

如w值落在法线向量离开平面的一边，$w^{T}x>0$；
如w值落在法线向量射向平面的一边，$w^{T}x<0$。



第三章 线性判别函数

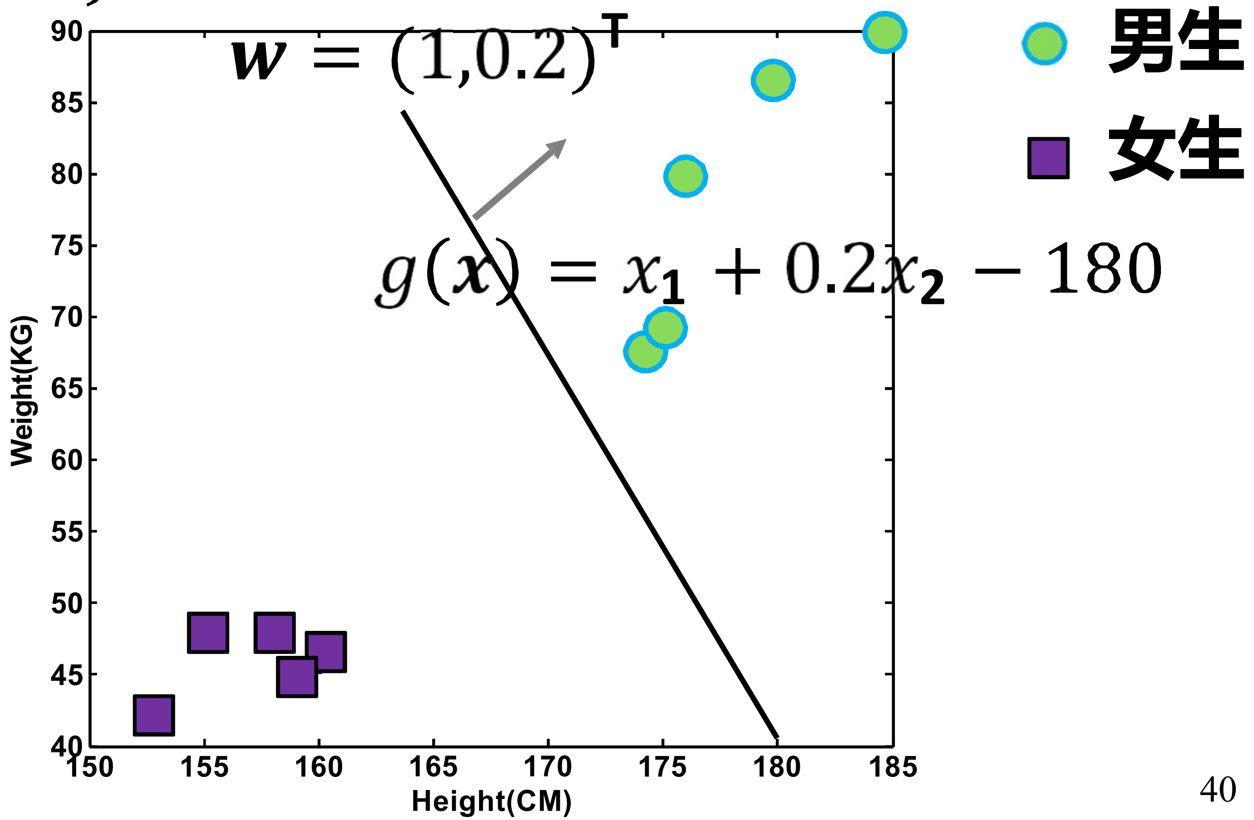
3.3超平面的几何性质

权向量$\boldsymbol{w} = (1,0.2)^{\mathsf{T}}$,

偏差$w_0 = -180$,

模式$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathsf{T}}$

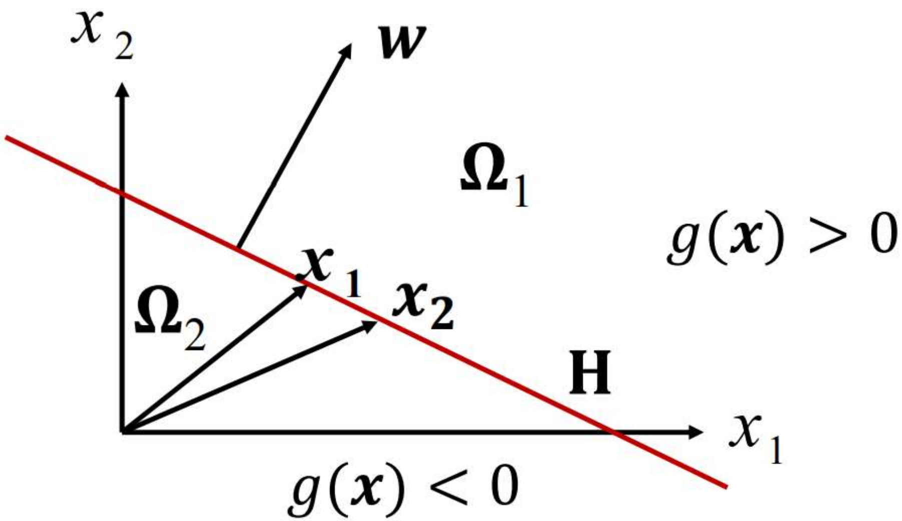
非增广模式空间



3.3超平面的几何性质

$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + w_0 = 0$决定一个决策界面，当$g(\boldsymbol{x})$为线性时，该决策界面是一个超平面H，并有以下性质：

性质①：w与H正交（如图所示）



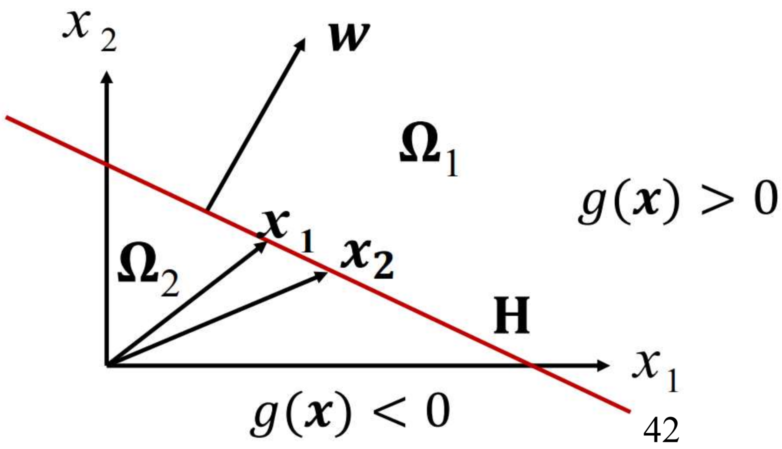
3.3超平面的几何性质

假设x_1, x_2是H上的两个向量，所以

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + w_0 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 + w_0 = 0$$
$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = 0$$

$(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$ 一定在超平面H上

$\boldsymbol{w}$与$(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$垂直，即$\boldsymbol{w}$与H正交。

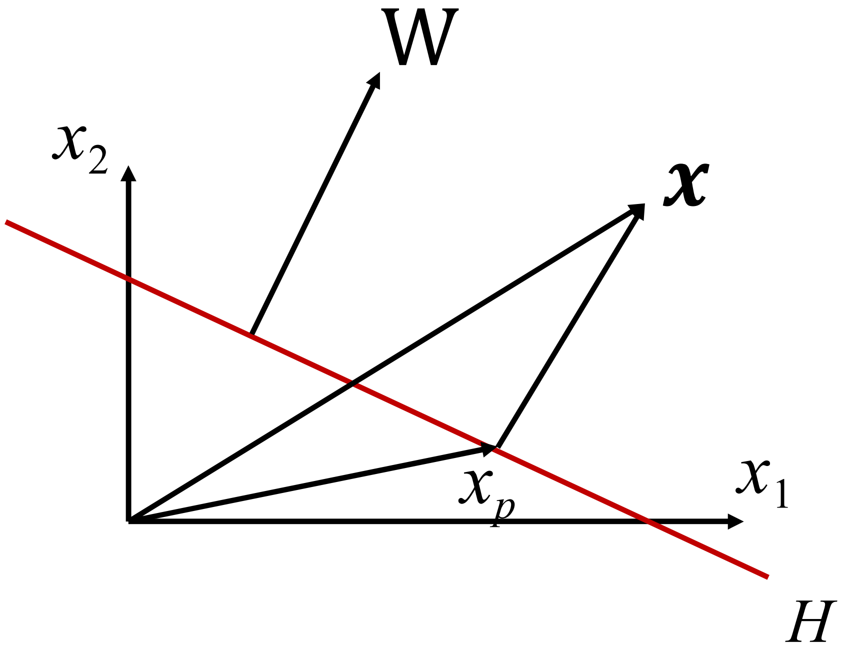


3.3超平面的几何性质

性质②：

$$\|r\| = \frac{|g(x)|}{\|r\|}$$

矢量x到H的距离$\|r\|$与$|g(x)|$值成正比



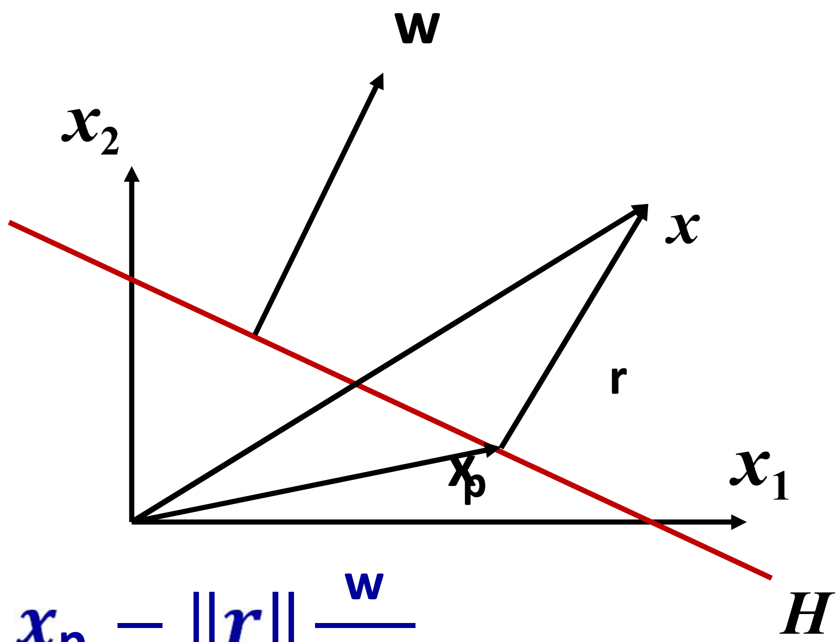
3.3超平面的几何性质

x_p是x 在H的投影，r是x射向x_p的向量，

$\frac{w}{\|w\|}$是w方向的单位向量。

$$x = x_\mathrm{p} + r = x_\mathrm{p} + \|r\| \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

以 x 在超平面的正侧为例!



若x 在超平负侧 $x = x_\mathrm{p} - r = x_\mathrm{p} - \|r\| \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$

3.3超平面的几何性质

另一方面:

$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + w_{\mathbf{0}} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{r}) + w_{\mathbf{0}}$$

因为x_p与H相交，所以

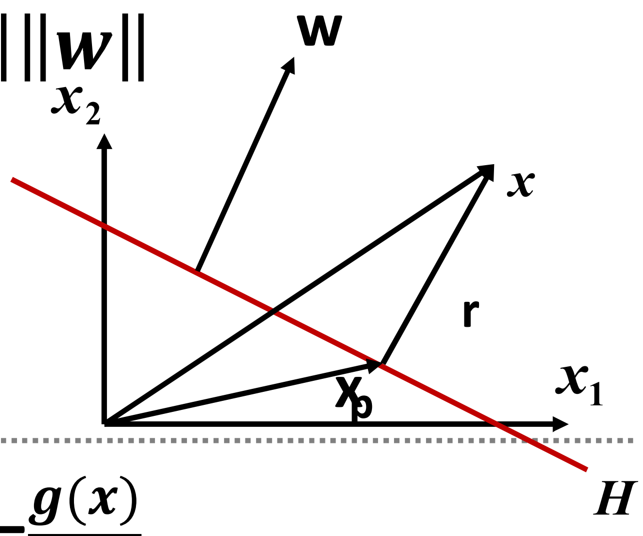
$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} + w_{\mathbf{0}} = 0$$

因此，

$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} = \|\boldsymbol{r}\|\frac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|} = \|\boldsymbol{r}\|\|\boldsymbol{w}\|$$

得:

$$\|\boldsymbol{r}\| = \frac{g(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{w}\|}$$



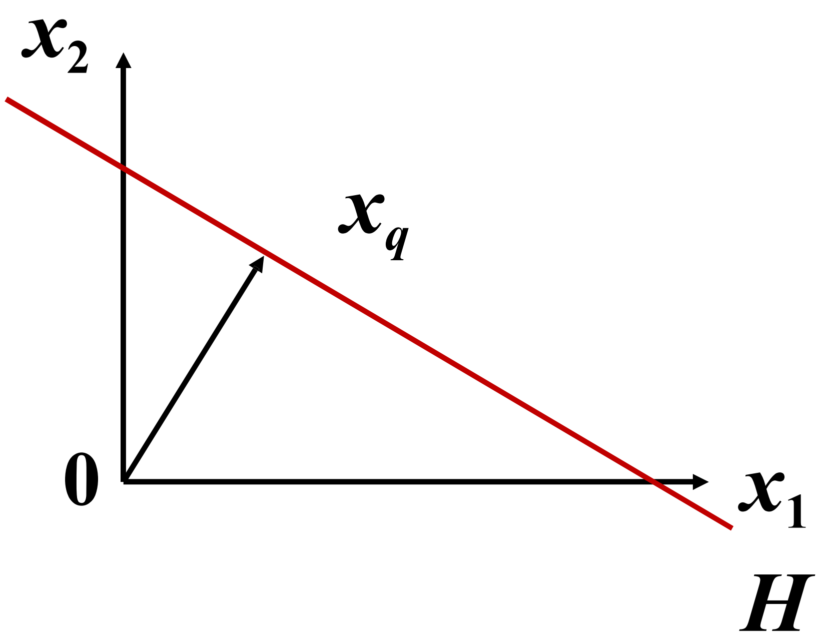
若x在超平负侧$\|\boldsymbol{r}\|$=$\frac{-g(x)}{\|\boldsymbol{w}\|}$，因此$\|\boldsymbol{r}\|$=$\frac{g(x)}{\|\boldsymbol{w}\|}$

3.3超平面的几何性质

性质③：

$$\|\boldsymbol{x}_q\| = \frac{|w_0|}{\|\boldsymbol{w}\|}$$

原点到H的距离与w_0成正比。

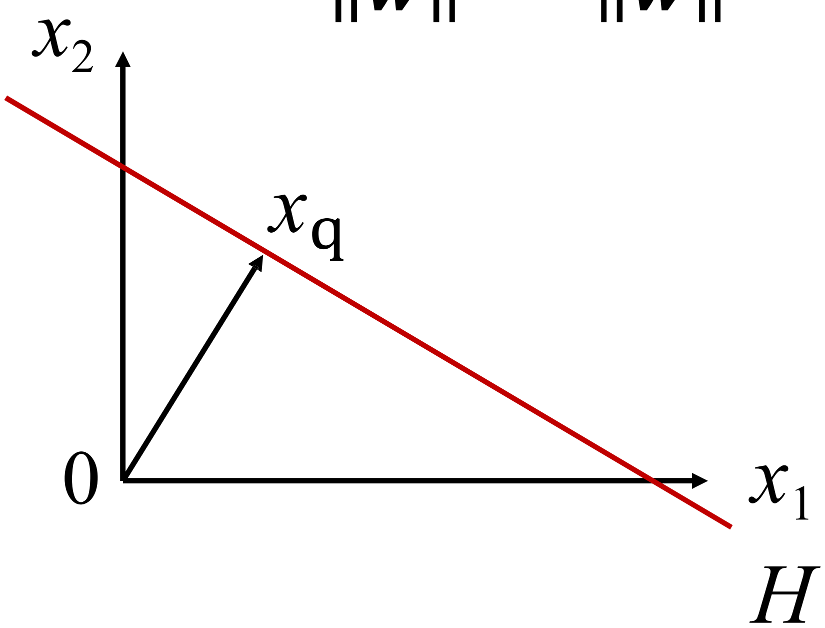


3.3超平面的几何性质

因为$g(\mathbf{0}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{0} + w_0 = w_0$

由性质②：矢量$\boldsymbol{x}$到$\mathbf{H}$的距离 $\|\boldsymbol{r}\|$与$g(\boldsymbol{x})$ 值成正比（$\|\boldsymbol{r}\|=\frac{g(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{w}\|}$），可知：

$$\|\boldsymbol{x}_{\mathrm{q}}\| = \frac{|g(\mathbf{0})|}{\|\boldsymbol{w}\|} = \frac{|w_0|}{\|\boldsymbol{w}\|}$$



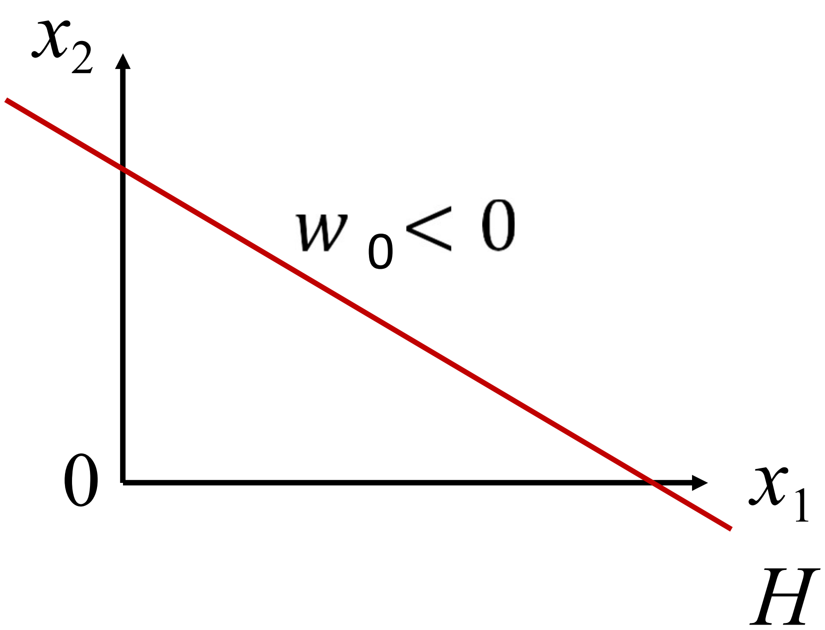
3.3超平面的几何性质

性质④:

若$w_0 > 0$，则原点在超平面H的正侧

若$w_0 < 0$，则原点在超平面H的负侧

若$w_0 = 0$,则$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，超平面H通过原点

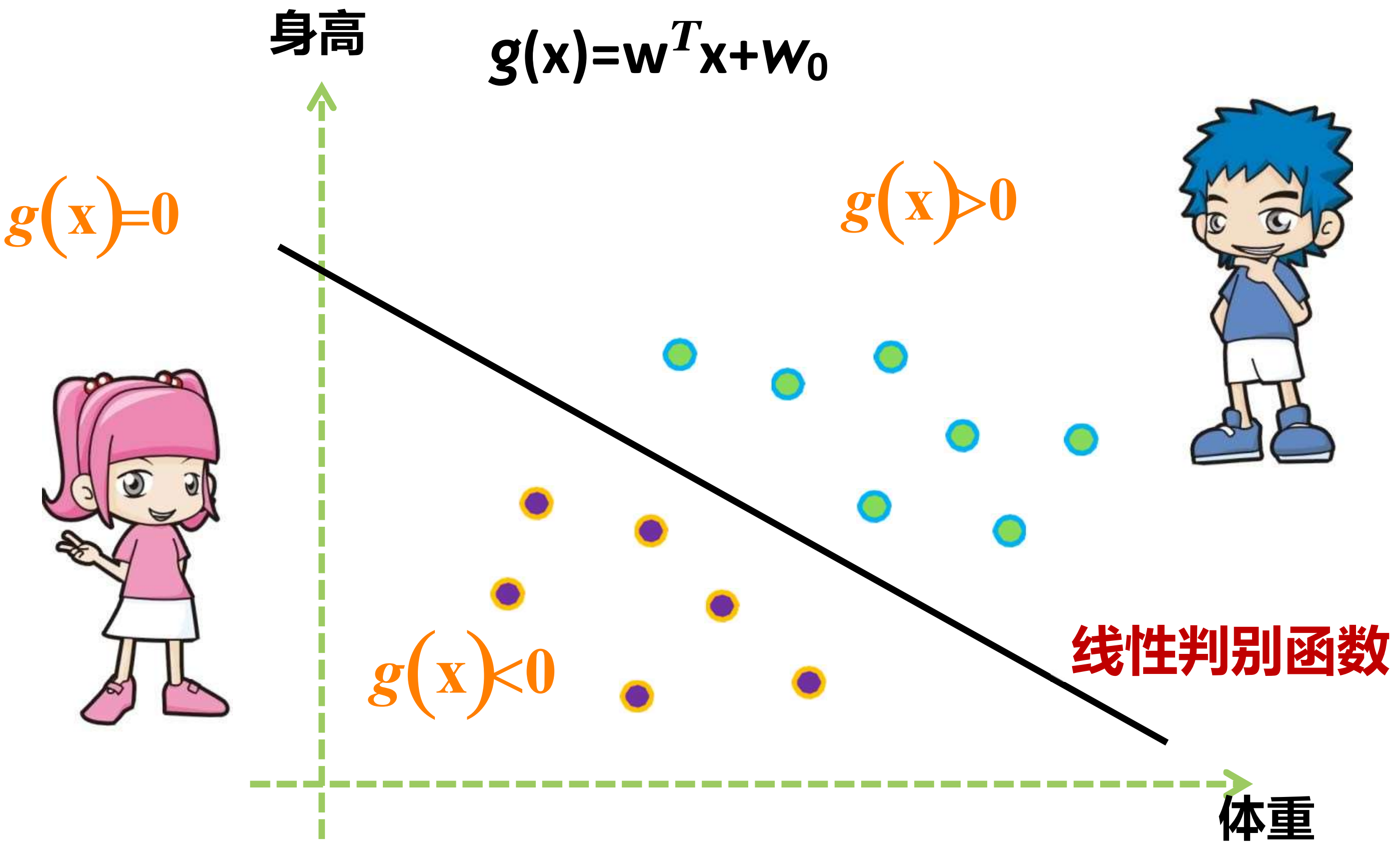


小结

（1）线性判别函数

（2）模式空间和权空间

（3）线性判别函数的几何性质



End